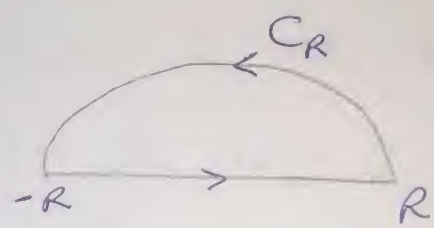
محاضرة رقم ١٧

[3] Integration of the form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \begin{cases} \cos ax \\ \sin ax \end{cases} dx$$

لتحويل هذه الصورة الى صورة مركبة نضع بدلاً من sin أو cos
إلى e^{ax} ويتحول التكامل إلى :-

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx$$



$$\oint_C f(z)\, e^{iaz}\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{iax}\, dx + \int_{C_R} f(z)\, e^{iaz}\, dz$$

$$I = I_1 + I_2$$

I ← يحسب بـ Complex

I_1 ← تعطى الرأس

I_2 ← * إثبت أنها صفر

$|z| = R \Rightarrow z = R e^{i\theta}$ ← مع I_2 حتى * نثبت أنها صفر

$$e^{iaz} = e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)} = e^{iaR\cos\theta} \cdot e^{-aR\sin\theta}$$

$$|e^{iaz}| = \underbrace{|e^{iaR\cos\theta}|}_{1}\,|e^{-aR\sin\theta}| = e^{-aR\sin\theta}$$

$\cos(\,) + i\sin(\,)$

$$\text{as: } R \to \infty \implies e^{-\infty} \to 0$$

$$e^{iaz} = \cos(az) + i\sin(az) \Longleftarrow$$

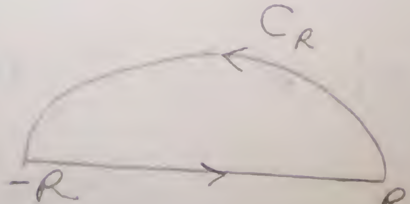
بعد حساب التكامل إذا كانت المسألة $\cos az$ نأخذ (الجزء الحقيقي) Re للناتج وإذا كانت المسألة $\sin az$ نأخذ $Im.$ للناتج.

Ex: Evaluate $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx$

← لابد أن تكون الحدود من $-\infty$ إلى ∞

$$f(x) = \frac{\cos ax}{x^2+1} \;;\; f(-x) = \frac{\cos(-ax)}{(-x)^2+1} = f(x) \;\; \boxed{\text{is even}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx$$



$$\underbrace{\oint_C \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz}_{I} = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz}_{I_2}$$

I ← نحسب ـ Complex ، I_1 ← الرأس ، I_2 ← نثبت أنها صفر

$$I = \oint_C \frac{e^{iaz}}{z^2+1}\,dz$$

أصفار المقام

$$z^2+1=0$$

$$z^2-i^2=0 \Rightarrow (z-i)(z+i)=0$$

$z_1 = i$ ← تقع داخل المنحنى

$z_2 = -i$ ← لا تقع داخل المنحنى

$$I = \oint_C \frac{e^{iaz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz = \oint_C \frac{\frac{e^{iaz}}{(z-z_2)}}{(z-z_1)}\,dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{iaz_1}}{z_1-z_2}\right) = \frac{2\pi i \; e^{-a}}{2i}$$

$$\boxed{I = \pi e^{-a}}$$

* فأخذ الجزء الحقيقي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}$$

نثبت أن:

$$I_2 = \int_{C_R} \frac{e^{-az}}{z^2+1}\, dz = 0$$

$$I_2 = 0 \Leftarrow |I_2| \leqslant 0$$

$$|I_2| \leqslant \int_{C_R} \frac{|e^{-az}|}{|z^2+1|}\, |dz|$$

$$|z| = R \quad , \quad z = Re^{i\theta} \quad ; \quad 0 < \theta < \pi$$

$$|e^{-az}| = |e^{-ax}|\,|e^{-aiy}| = e^{-ax}$$

$$z = R\cos\theta + iR\sin\theta = x + iy$$

$$|I_2| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\cos\theta}}{R^2-1}\, R\, d\theta$$

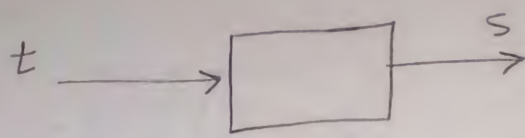
as $R \longrightarrow \infty$

$$e^{-R\cos\theta} \longrightarrow 0 \quad ; \quad \frac{R}{R^2-1} \longrightarrow 0$$

$$|I_2| \leqslant 0 \Rightarrow I_2 = 0$$

Inverse Laplace Transform by Complex integration

Notes

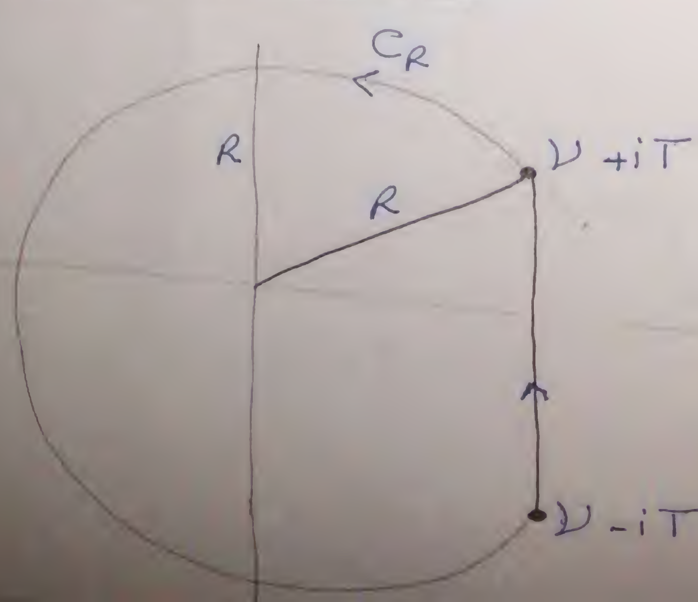


$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \longrightarrow *$$

طريقة التفكير لتعيين قيمة المعكوس باستخدام المعادلة * هو أنه
نوجد منحنى يعطي رأس التكامل أي تكامل من $-\infty$ إلى $+\infty$
بحيث أن هذا المنحنى يمكن تحويله إلى صورة مركبة.

Bromwich Contour



← المعادلة تكوين منحنى عبارة عن دائرة نصف قطرها R

$$R = \sqrt{T^2 + \nu^2}$$

← ويتحول التكامل على منحنى c

$$c = C_R \cup \overline{(\nu - iT)(\nu + iT)}$$

$$\oint_c = \int_{\nu - iT}^{\nu + iT} + \int_{C_R}$$

$$I = I_1 + I_2$$

as: $R \longrightarrow \infty$

$$\int_{C_R} \longrightarrow 0 \quad ; \quad \int_{\nu - iT}^{\nu + iT} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

تكامل عكس لابلاس

← فيكون:

$$\oint_c = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{st} \cdot ds$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\, e^{st}\, ds = \sum_{s=s_i} Res\ F(s)\, e^{st}}$$

ـــ لحساب عكس لابلاس نضرب الدالة $F(s)$ في e^{st} ونحسب (Res) لحاصل الضرب.

Ex Find I.L.T by Bromwich contour for the following f^{ns}.

$\boxed{1}$ $F_1(s) = \dfrac{1}{s-1}$ $\qquad$ $\boxed{2}$ $F_2(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$

sol

$\boxed{1}$

$$F_1(s)\, e^{st} = \frac{e^{st}}{s-1}$$

أصفار المقام $\boxed{s=1}$

$$\underset{s=1}{\mathrm{Res}}\, F_1(s)\, e^{st} = \lim_{s\to 1} (s-1)\frac{e^{st}}{s-1} = e^{t}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = e^{t}$$

$\boxed{2}$ $F_2(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$ $\qquad$ $s=1$ ، $s=2$ أصفار المقام

$$\underset{s=1}{\mathrm{Res}}\, F(s)\, e^{st} = \lim_{s\to 0} (s-1)\frac{e^{st}}{(s-1)(s-2)} = -e^{t}$$

$$\underset{s=2}{\mathrm{Res}}\, F(s)\, e^{st} = \lim_{s\to 2} (s-2)\frac{e^{st}}{(s-1)(s-2)} = e^{2t}$$

$$\therefore f(t) = \sum Res\ F(s)\ e^{st}$$

$$= e^{2t} - e^{t}$$

$\boxed{Ex}$

$\boxed{1}$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}\right)$ $\quad 0 < x < 1$, a,b Const

$\boxed{2}$ $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sinh sx}{s^{2}\cosh sa}\right)$

$\boxed{3}$ $\mathcal{L}^{-1}\ \frac{\cosh sx}{s^{3}\cosh sb}$

$\boxed{4}$ $\mathcal{L}^{-1}\ \frac{\tan\frac{as}{2}}{s(s+b)}$

Report

يسلم قبل امتحان

Midterm

$\boxed{Sol}$

$\boxed{1}$

$$F(s)\,e^{st} = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}$$

$$s = 0 \ ; \ \cosh\sqrt{s} = 0$$

أصفار المقام

$$\cosh\sqrt{s} = \frac{e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}}{2} = 0$$

$$e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}} = 0$$ بالضرب * $e^{\sqrt{s}}$

$$e^{2\sqrt{s}} = -1 \Rightarrow 2\sqrt{s} = \ln(-1)$$

$$\ln(x+iy) = \ln(r) + i(\theta \pm 2n\pi)$$

$$x=0,\ y=-1 \ ;\ r=1 \ ;\ \theta = \pi$$

$$2\sqrt{s_n} = 0 + i(\pi \pm 2n\pi)$$

$$s_n = \frac{-(\pi \pm 2n\pi)^2}{4}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=0} F(s)\, e^{st} = \lim_{s\to 0} (s-0) \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh\sqrt{s}} e^{st} = \boxed{1}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n} F(s)\, e^{st} = \lim_{s\to s_n} (s-s_n) \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} e^{st}$$

$$= \lim_{s\to s_n} \frac{\cosh x\sqrt{s} * e^{st}}{s} * \lim \underbrace{\frac{(s-s_n)}{\cosh\sqrt{s}}}$$

لوبيتال

$$= \frac{e^{s_n t}\cosh x\sqrt{s_n}}{s_n} * \lim_{s\to s_n} \frac{1}{\sinh\sqrt{s} * \frac{1}{2\sqrt{s}}}$$

$\boxed{9}$ Lec 17

$$\boxed{= \frac{e^{s_n t} \cosh x\sqrt{s_n}}{s_n} * \frac{2\sqrt{s_n}}{\sinh\sqrt{s_n}} \longrightarrow *}$$

$$\sqrt{s_n} = \frac{i\,(\pi \pm 2n\pi)}{2}$$

$$\cosh x\sqrt{s_n} = \cos\left(\frac{\pi \pm 2n\pi}{2}\right)x$$

$$\sinh\sqrt{s_n} = i\sin\left(\frac{\pi \pm 2n\pi}{2}\right)$$

بالتعويض في (*)

$$f(t) = 1 + *$$

$\boxed{10}$ Lec 17